N° D'ORDRE :
41.

THÈSES DE DOCTORAT

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PAR M. N. ENACHE,

~~Astronome de l'Observatoire de Paris~~,
Licencié ès Sciences mathématiques de la Sorbonne,
Membre de la Société belge d'Astronomie
et de la Société astronomique de France.

1re THÈSE. — HYDRODYNAMIQUE : CONTRIBUTION A LA *Théorie de l'écoulement* SUR LES DÉVERSOIRS EN MINCE PAROI ET A NAPPE NOYÉE EN DESSOUS.

2e THÈSE. — MÉCANIQUE CÉLESTE : PRINCIPES DE LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ET SON APPLICATION AU CALCUL DES *Perturbations des planètes.*

4 Mars

Soutenues le ~~28 février~~ 1908, devant la Commission d'examen.

MM. P. APPELL, *Président.*
BOUSSINESQ,
POINCARÉ, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

N° D'ORDRE :
41.

THÈSES DE DOCTORAT

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PAR M. N. ENACHE,

Astronome de l'Observatoire de Paris,
Licencié ès Sciences mathématiques de la Sorbonne,
Membre de la Société belge d'Astronomie
et de la Société astronomique de France.

1re THÈSE. — HYDRODYNAMIQUE : CONTRIBUTION A LA *Théorie de l'écoulement* SUR LES DÉVERSOIRS EN MINCE PAROI ET A NAPPE NOYÉE EN DESSOUS.

2e THÈSE. — MÉCANIQUE CÉLESTE : PRINCIPES DE LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ET SON APPLICATION AU CALCUL DES *Perturbations des planètes.*

Soutenues le 4 Mars ~~28 février~~ 1908, devant la Commission d'examen.

MM. P. APPELL, *Président.*
BOUSSINESQ, POINCARÉ, *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	PAUL APPELL	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX, professeur.	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	L. TROOST, CH. WOLF. RIBAN.	
PROFESSEURS	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	G. BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignem[t] P. C. N.).
	P. JANET	Physique Id.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	TANNERY	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY	Zoologie.
	LE CHATELIER	Chimie.
	N	Chimie biologique.
	N	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	N	Physique.
PROFESSEURS ADJOINTS	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC	Physique.
	HADAMARD	Calcul différentiel et intégral.
	MATRUCHOT	Botanique.
	MICHEL	Minéralogie.
	DAGUILLON	Botanique.
	BOUVEAULT	Chimie organique.
	BOREL	Théorie des fonctions.
	PRUVOT	Anatomie comparée.
	CAULLERY	Zoologie (évolution des êtres organisés).
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

40988 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

MONSIEUR J. BOUSSINESQ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA SORBONNE.

Hommage de profonde gratitude.

N. ENACHE.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554031_0071

PREMIÈRE THÈSE.

CONTRIBUTION
A LA
THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT
SUR
LES DÉVERSOIRS EN MINCE PAROI
ET
A NAPPE NOYÉE EN DESSOUS.

CHAPITRE I.

HISTORIQUE.

1. Belanger, vers 1840, a, le premier, imaginé un essai de théorie du déversoir le plus simple, à seuil horizontal épais et évasé en amont, au-dessus duquel les filets fluides seraient rectilignes et parallèles sur une petite longueur, ou tout au moins, à la traversée d'une section normale prise sur le seuil; de sorte que la pression y variât *hydrostatiquement*, comme elle le fait dans la masse fluide en repos d'amont, à la naissance même de ces filets fluides. Dans ces conditions, on peut y négliger les frottements, et, par suite, y appliquer à chaque filet fluide le principe de Daniel Bernoulli *sur la conservation de la charge*, en y tenant compte de ce fait que, pour tous les filets fluides, venus d'une masse sensiblement en repos, la charge est la même. Cela donne

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = h, \tag{1}$$

$\frac{V^2}{2g}$ désignant la hauteur due à la vitesse V, qu'on observe en un point

quelconque du filet, comme, par exemple, sur le seuil; $\frac{p}{\rho g}$ la hauteur de fluide qui produirait statiquement la pression p, observée au même point; enfin z l'altitude du point considéré du filet au-dessus du plan horizontal du seuil (que nous prendrons comme plan de repère); et h la *hauteur de charge*, ou hauteur verticale (encore au-dessus du seuil) de la surface libre, sur la *section d'amont*, d'où partent, avec une vitesse qu'on suppose négligeable, tous les filets fluides.

On voit aisément que h exprime la charge pour tous les filets, considérés à l'origine. En effet, le mouvement y étant très faible, le carré $\frac{V^2}{2g}$ y est négligeable, et le premier membre de l'équation (1) s'y réduit à $\frac{p}{\rho g} + z$; mais (*fig.* 1, p. 6) $\frac{p}{\rho g} = SM =$ hauteur du fluide mesurant la pression p; et $z = -HM =$ hauteur effective; donc $\frac{p}{\rho g} + z = SM - HM = HS = h$; et la quantité (constante le long du filet), $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z$, s'y trouve avoir la valeur commune h pour tous les filets.

Cela posé, si h' désigne la hauteur verticale, analogue à h, de la nappe fluide coulant sur le seuil, la troisième équation indéfinie de l'Hydrodynamique (ou d'Euler),

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -g - w', \tag{2}$$

se réduira sur le seuil à $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -g$; car w' y est nul, à raison de la forme rectiligne et horizontale des filets fluides, et, en intégrant, on trouve

$$p = \rho g(h' - z), \tag{3}$$

vu qu'à la surface $p = 0$ et $z = h'$. En portant la valeur (3) de p dans (1) il vient finalement, comme vitesse *commune* des filets sur le seuil,

$$V = \sqrt{2g(h - h')}, \tag{4}$$

où $h - h'$ est ainsi la dénivellation totale éprouvée jusqu'au seuil par le fluide à partir de la section d'amont. La formule (4) est celle de Belanger, qui donne la vitesse V, sur le seuil, des filets fluides, tant

intérieurs que superficiels. Le débit q, volume du fluide (par unité de longueur du déversoir), fourni dans l'unité de temps, est visiblement exprimé par la formule

$$q = \int_0^{h'} \mathrm{V}\, dz = h' \sqrt{2g(h - h')}. \tag{5}$$

Or Belanger a remarqué qu'on obtenait sensiblement le débit réel ou observé en déterminant h' de manière que l'expression (5) de q *soit maxima*, circonstance qui a conduit à formuler *le principe du débit maximum*. Ce maximum existe bien; car q, nul aux deux limites $h' = 0$ et $h' = h$, devient maximum pour $h' = \frac{2}{3}h$, où il atteint la valeur

$$q = \frac{2}{3\sqrt{3}} h \sqrt{2gh} = (0{,}385) h \sqrt{2gh}, \tag{6}$$

débit à peu près conforme aux résultats de l'observation.

2. M. Boussinesq, en 1873, dans son Mémoire intitulé *Essai sur la théorie des eaux courantes*, a motivé comme il suit le principe du débit maximum pour le déversoir de Belanger. Il a imaginé le niveau d'aval maintenu, d'abord, aussi peu différent que l'on veut du niveau d'amont, par une résistance quelconque à l'écoulement dans le *canal de fuite;* et il a supposé qu'en réduisant peu à peu cette résistance l'on abaisse lentement le niveau d'aval.

Or chaque abaissement élémentaire de ce niveau se propage, sur le seuil, sous la forme d'une petite onde négative *ascendante*, animée par rapport à la masse fluide de la vitesse de propagation (donnée par la formule de Lagrange) $\sqrt{gh'}$. Pour que le régime sur le seuil devienne indépendant du niveau d'aval, il faut que cette vitesse de propagation soit inférieure à la vitesse de translation V du fluide sur le seuil, afin que l'onde dont il s'agit ne puisse remonter le courant.

L'état définitif cherché du déversoir, état réalisé dans ce qu'on appelle *déversoir à nappe libre*, sera donc atteint au moment où l'on aura

$$\mathrm{V} = \sqrt{gh'}.$$

Remplaçons-y V par sa valeur tirée de l'équation (4) et il viendra

$$(7) \qquad 2g(h-h') = gh' ; \qquad \text{d'où} \qquad h' = \frac{2}{3}h.$$

A partir de ce moment, l'onde, immobilisée à l'extrémité aval du seuil par la vitesse de translation, cesse de progresser sur le seuil, devenu désormais infranchissable aux perturbations d'aval; et, par suite, l'écoulement est désormais invariable sur le seuil. Donc le débit fourni à cet instant-là n'est plus susceptible d'être dépassé; et l'on voit qu'il atteint précisément alors la valeur maxima donnée par Belanger.

3. Dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, du 4 juillet et des 10, 17, 24 octobre 1887, M. Boussinesq a appliqué, pour la première fois, le principe de Belanger ou du débit maximum, aux déversoirs *en mince paroi*, à nappe libre et sans contraction latérale.

L'hypothèse la plus simple qu'on puisse imaginer, et que l'auteur fait dans ces Notes, consiste à admettre l'existence, dans la nappe fluide, d'une section contractée sensiblement verticale, à la traversée de laquelle tous les filets fluides situés dans un même plan vertical longitudinal seraient, non plus des droites horizontales, comme dans le cas d'un seuil épais, mais des *courbes parallèles*, c'est-à-dire ayant *le même centre de courbure* sous la nappe déversante, à une distance R_0 du filet inférieur.

Montrons d'abord comment l'auteur motive, pour ce cas de la mince paroi, le principe du débit maximum.

L'exemple du déversoir de Belanger fait voir que l'invariabilité de l'écoulement *sur le seuil* se produit, pour des niveaux h'' d'aval de plus en plus bas, au moment où la vitesse de translation V, sur le seuil, est suffisante pour y empêcher la transmission des perturbations d'aval. Or, à ce moment, la dénivellation $h - h'$ peut être considérée comme un obstacle à la propagation des ondes négatives ascendantes, aussi grand que l'est, sur le seuil même, la vitesse de translation V *engendrée précisément par cette dénivellation;* car il est naturel que ces deux formes, statique et dynamique, d'une même entité, s'équivaillent dans le problème. Autrement dit, la dénivellation $h - h'$ doit s'opposer alors

à l'accroissement du débit, pour un abaissement élémentaire $-dh'$ du niveau sur le seuil, *tout autant* que la vitesse de translation V, régnant sur celui-ci, s'oppose à ces abaissements élémentaires $-dh'$, pour les abaissements ultérieurs $-dh''$ du niveau d'aval; et l'on aura $\frac{dq}{dh'} = 0$ en même temps que $\frac{dh'}{dh''} = 0$.

Ainsi le régime du déversoir deviendra invariable, et l'on aura $dh' = 0$, au moment où le débit q, *considéré comme fonction de* h', sera maximum; car l'équation $\frac{dq}{dh'} = 0$ exprime précisément ce maximum. Or ces raisonnements généraux paraissent s'appliquer aussi bien aux déversoirs en mince paroi, qu'au déversoir à seuil épais imaginé par Belanger.

4. Appliquons le principe de Daniel Bernoulli au déversoir en mince paroi. Nous aurons

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + \varepsilon + z\cos\beta = h, \tag{8}$$

relation où, d'après la fig. 1 (p. 6), l'on a posé $\varepsilon = JI$, $z = E'M'$, $h = HS$, et où β désigne l'angle que la *section contractée* E′F′ fait avec la verticale. Si l'on écrit $ch = \varepsilon$, c s'appelle la *contraction inférieure* de la nappe déversante, et l'équation (8) devient

$$\frac{p}{\rho g} = h(1-c) - z\cos\beta - \frac{V^2}{2g}. \tag{9}$$

La troisième équation d'Euler, appliquée suivant la droite E′F′, nous donne également

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dp}{dz} = -\cos\beta + \frac{V^2}{g(R_0+z)}, \qquad \text{où} \qquad R_0 = CE'. \tag{10}$$

Or, en différentiant l'équation (9) par rapport à z et égalant le résultat au second membre de (10), il vient

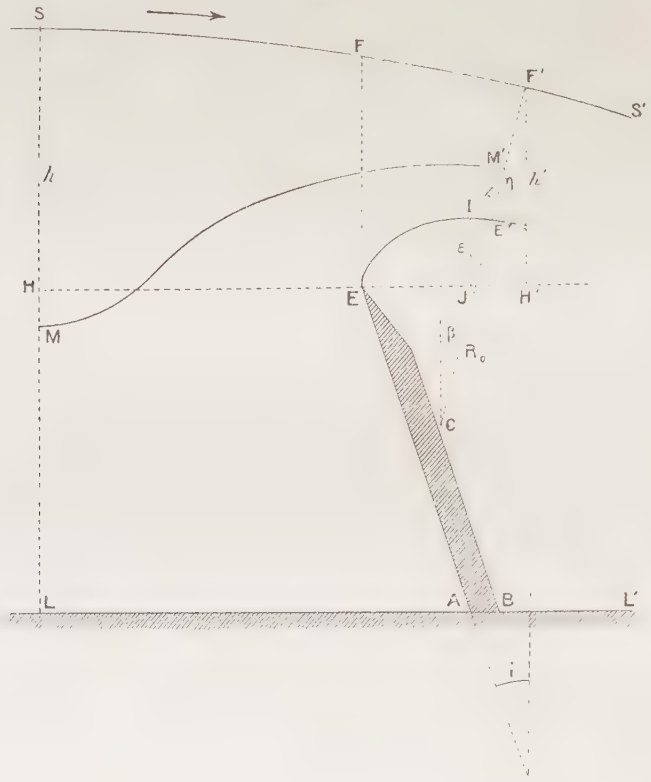
$$\frac{d}{dz}[V(R_0+z)] = 0 \qquad \text{ou} \qquad (R_0+z)V = \text{const.}$$

Pour le filet fluide inférieur, on a

$$V = V_0, \qquad p = p_0 = N\rho g h,$$

si N désigne le quotient de la pression $N\rho gh$ ou p_0 sous la nappe (au

Fig. 1.



niveau IE') par ρgh. Donc

$$(R_0 + z)V = R_0 V_0,$$

et, d'après (9),

$$\frac{p_0}{\rho g h} = h(1 - c) - \frac{V_0^2}{2g}.$$

Il en résulte

$$(11) \qquad V_0 = \sqrt{2gh(1 - c - N)} \qquad \text{et} \qquad V = \frac{R_0}{R_0 - z}\sqrt{2gh(1 - c - N)},$$

Pour le filet supérieur on a, si h' désigne l'altitude H'F' du haut de la section contractée,

$$V = V_1, \qquad p = 0 \qquad \text{et} \qquad z = \eta = \frac{h' - \varepsilon}{\cos\beta} = \frac{h' - hc}{\cos\beta} = \frac{h}{\cos\beta}(K - c),$$

en posant $\frac{h'}{h} = K$.

Donc, d'après (9),

$$V_1 = \sqrt{2gh(1 - K)}.$$

Dans ces équations, η désigne la droite E'F', très peu différente de sa projection $h' - \varepsilon = \eta\cos\beta$ sur la verticale, et le rapport $K = \frac{h'}{h}$ est dit la *contraction supérieure* de la nappe déversante. Posons

$$(12) \quad N + c = N', \qquad n = \sqrt{1 - \frac{N}{1 - c}} = \sqrt{\frac{1 - N'}{1 - c}}, \qquad k = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1 - K}{1 - c}}.$$

Et, comme $R_0 V_0 = (R_0 + \eta)V_1$, nous aurons évidemment

$$(13) \quad \begin{cases} N = (1 - c)(1 - n^2), \qquad N' = 1 - (1 - c)n^2, \\ 1 - K = (1 - c)n^2k^2 = (1 - N')k^2, \qquad V_1 = V_0 k, \\ \dfrac{\eta_1}{h} = \dfrac{1 - c}{\cos\beta}(1 - n^2k^2), \qquad \dfrac{R_0}{h} = \dfrac{k}{1 - k}\dfrac{\eta_1}{h} = \dfrac{1 - c}{\cos\beta}\dfrac{k}{1 - k}(1 - n^2k^2). \end{cases}$$

Plusieurs cas peuvent se présenter, dont deux seulement nous occuperont : 1° le déversoir *à nappe libre*, où l'atmosphère extérieure communiquera librement avec le dessous de la nappe, de manière à donner constamment $p_0 = 0$, $N = 0$ et $n = 1$; 2° le déversoir *à nappe noyée en dessous*, où le dessous de la nappe sera occupé par une eau stagnante, ou plutôt tourbillonnante, soumise à des pressions croissant à peu près, de haut en bas, d'après la loi hydrostatique. La pression, au niveau EH' du seuil, y sera donc $p_0 + \rho g\varepsilon = N\rho gh + \rho gch = N'\rho gh$, et le paramètre N' évaluera son rapport à ρgh, *pression relative, au niveau du seuil, sous la nappe noyée en dessous*. Lorsque h' ou K variera (le niveau d'aval s'abaissant), nous supposerons N' *constant et donné, comme si le dessous de la nappe était mis en communication, par un tuyau débouchant contre le seuil, avec une masse considérable d'eau en repos située dans un réservoir latéral indépendant*.

Cela posé, considérons le débit q (par unité de longueur du déversoir à travers E′F′. Il sera

$$(14)\qquad q=\int_0^{\eta} \mathrm{V}\,dz = n\mathrm{R}_0\sqrt{2gh(1-c)}\int_0^{\eta}\frac{dz}{\mathrm{R}_0+z}$$

$$= \mathrm{R}_0 n\sqrt{2gh(1-c)}\log\frac{\mathrm{R}_0+\eta}{\mathrm{R}_0} = \mathrm{R}_0 n\sqrt{2gh(1-c)}\log\frac{1}{k}$$

$$= \frac{(1-c)^{\frac{3}{2}}}{\cos\beta}\,\frac{nk-n^3k^3}{1-k}\,h\sqrt{2gh}\log\frac{1}{k} = mh\sqrt{2gh},$$

si l'on appelle finalement m le *coefficient de débit*, c'est-à-dire si l'on pose $q=mh\sqrt{2gh}$; ce qui donne, en réduisant $\cos\beta$ à l'unité,

$$(15)\qquad m=(1-c)^{\frac{3}{2}}(nk-n^3k^3)\frac{\log k}{1-k}.$$

Le maximum de m, dans l'hypothèse des nappes noyées en dessous et soumises à une pression relative donnée ou constante N′, *au niveau du seuil*, s'obtiendra en annulant la dérivée de $\log m$, par rapport à h', ou, par suite, à K; ce qui, si k', c' et n' désignent les dérivées respectives en K de k, c et n, donne l'équation

$$-\frac{3}{2}\frac{c'}{1-c}+\frac{(1-3n^2k^2)(nk'+kn')}{nk-n^3k^3}+\frac{k}{k\log k}-\frac{k'}{k-1}=0.$$

Mais la différentiation en K de la seconde et de la troisième relation (13), écrites

$$1-\mathrm{N}'=(1-c)n^2, \qquad 1-\mathrm{K}=(1-\mathrm{N}')k^2,$$

et sous la condition N′ = const., donne

$$(16)\qquad n'=\frac{nc'}{2(1-c)} \qquad \text{et} \qquad k'=\frac{-1}{2kn^2(1-c)};$$

ce qui permet d'éliminer les deux dérivées n' et k', en ne laissant subsister que la dérivée c' de la contraction inférieure. Et il vient finale-

ment, comme équation caractérisant le maximum du débit dans le cas de la nappe noyée en dessous,

$$\frac{n^2k^2}{1-n^2k^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right) = \frac{n^2k^2}{1-n^2k^2}\,c'. \tag{17}$$

Comme, effectivement, la dérivée c' sera toujours petite, l'on aura une première valeur approchée k_0 de k en annulant c'; ce qui réduira l'équation (17) à la forme assez simple

$$\frac{n^2k_0^2}{1-n^2k_0^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k_0} + \frac{1}{1-k_0}\right). \tag{18}$$

Or celle-ci est aisément résoluble par rapport à n^2; de sorte que, si l'on se donne arbitrairement k_0, l'on obtient la valeur correspondante de n^2, et ensuite, au même degré d'approximation, toutes les autres quantités. Ainsi l'on trouve tous les paramètres de la question, en fonction d'abord de k_0 et puis, grâce à une élimination ou à la construction numérique d'une Table, en fonction de la *pression relative* N′ sous la nappe déversante.

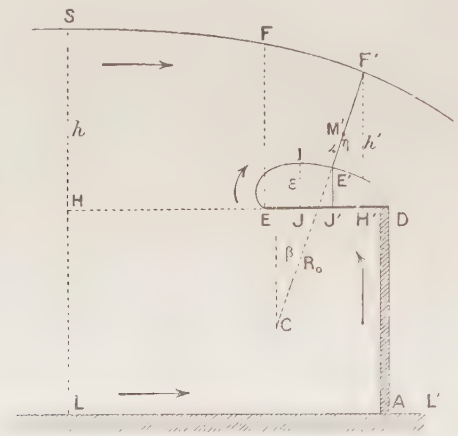
Le cas de la nappe libre sera examiné à part un peu plus loin.

5. Pour calculer la contraction inférieure c pour chaque valeur de K, considérons d'abord le déversoir, armé supérieurement d'une large et mince plaque horizontale DE′ (*fig.* 2) dirigée vers l'amont et annulant l'écoulement contre la paroi verticale AD, cas où la contraction inférieure c atteint sa valeur maxima C, *immédiatement calculable*. En effet, en appliquant, pour un instant dt, le principe des quantités de mouvement suivant la direction HD à la masse fluide comprise, au début de cet instant, à l'amont de la section complexe J′E′F′ jusqu'en LS, M. Boussinesq a obtenu assez facilement la relation

$$2\cos\beta\int_0^{\eta}\left(\frac{V^2}{g} + \frac{p}{\rho g}\right)\frac{dz}{h^2} = \begin{cases} 1 - 2CN' + C^2 & \text{(nappe noyée en dessous),} \\ 1 & \text{(nappe libre).} \end{cases} \tag{19}$$

Remplaçons-y p et v par leurs expressions tirées de (9) et de (11); puis effectuons les intégrations, qui se font aisément, et, dans les

Fig. 2.



résultats, appelons ν et $\varkappa$ les valeurs de n et de k pour ce déversoir particulier, afin de ne pas confondre ces valeurs avec celles des paramètres analogues, dans notre déversoir sans armature. Il vient finalement, si l'on observe que, dans la nappe noyée en dessous,

$$\varkappa = \sqrt{\frac{1-k}{1-N'}} = k,$$

et que, pour la nappe libre, ν est l'unité (comme n),

$$(20)\quad \begin{cases} (1-C)^2(1-k^2\nu^2)[1+k(2-k)\nu] = (1-C)(1-C+2\nu^2C) \\ \qquad\qquad \text{(nappe noyée en dessous)}, \\ (1-C)^2(1-\varkappa^2)[1+\varkappa(2+\varkappa)] = 1 \qquad \text{(nappe libre)}, \end{cases}$$

équations où l'on a posé, d'après les seconde et troisième (13), et d'après la dernière (12),

$$(21)\quad \begin{cases} 1-K = k^2\nu^2(1-C), \qquad N' = 1-\nu^2(1-C) \\ \qquad\qquad \text{(nappe noyée en dessous)}, \\ \varkappa = \sqrt{\dfrac{1-K}{1-C}} \qquad \text{(nappe libre)}. \end{cases}$$

Les deux équations (20) donnent respectivement

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-C} = 1 + k - \nu^2 k^3 \left(1 + \dfrac{k}{2}\right) & \text{(nappe noyée en dessous)}, \\ \left(\dfrac{1}{1-C}\right)^2 = (1-x^2)(1+x)^2 = (1-x)(1+x)^3 & \text{(nappe libre)}. \end{cases}$$

La dérivée C′ de C par rapport à K s'obtiendra en différentiant ces formules; ce qui donne

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{C'}{(1-C)^2} = [1 - \nu^2 k^2 (3+2k)]\, k' - k^3 (2+k)\, \nu\nu' \\ \qquad\qquad \text{(nappe noyée en dessous)}, \\ \dfrac{C'}{(1-C)^3} = (1+x)^2 (1-2x)\, x' \qquad \text{(nappe libre)}. \end{cases}$$

Portons-y les valeurs de k', ν' et x' données par les équations (21) différentiées, savoir

$$(24)\quad \begin{cases} \nu' = \dfrac{\nu C'}{2(1-C)}, \qquad k' = -\dfrac{1}{2k\nu^2(1-C)} & \text{(nappe noyée en dessous)}, \\ \qquad\qquad x' = \dfrac{x^2 C' - 1}{2x(1-C)} & \text{(nappe libre)}, \end{cases}$$

et il vient, par une élimination immédiate de $1 - C$ au moyen de (22),

$$(25)\quad \begin{cases} C' = \dfrac{1}{k}\, \dfrac{\nu^2 k^2 (3+k) - 1}{2\nu^2 (1+k)} & \text{(nappe noyée en dessous)}, \\ C' = \dfrac{2x-1}{x(2-x)} & \text{(nappe libre)}. \end{cases}$$

Si nous considérons spécialement le cas de la nappe noyée en dessous, la valeur maxima de la fonction C pendant que, N′ étant constant, K (ou x) et ν varient, se produit au moment où la dérivée C′ s'annule, c'est-à-dire où l'on a

$$(26)\qquad \nu^2 k^2 (3+2k) - 1 = 0 \qquad \text{où} \qquad \nu^2 = \frac{1}{k^2 (3+2k)}.$$

Se donnant arbitrairement le paramètre positif k, on déduira ν; puis

la formule (22) donnera ce maximum de la contraction inférieure C, dans le déversoir avec armature.

Pour un déversoir ordinaire ou sans armature, on posera, pour toutes les valeurs de K,

$$(27) \qquad c = \frac{1}{2}C \quad \text{et, par suite,} \quad c' = \frac{1}{2}C'.$$

Observons, en effet, que la contraction inférieure c peut être obtenue théoriquement, non seulement dans ce cas d'une armature DE braquée vers l'amont (*fig.* 2), où la divergence *initiale* (sur le seuil E) des deux filets supérieur FF′ et inférieur EIE′ est environ de 180°, mais aussi dans le cas opposé où l'armature serait dirigée vers l'aval et où, par suite, la divergence des filets sur le seuil serait sensiblement nulle. Car il est évident que la contraction inférieure c pourrait être regardée alors comme nulle aussi. La quantité c s'annulant ainsi *avec la divergence initiale* des filets fluides et *croissant avec elle*, la loi approchée la plus simple qui puisse régir cette contraction inférieure sera celle de proportionnalité à la divergence en question; et il est naturel de l'admettre à ce titre. Or, dans le cas du déversoir vertical, où le filet inférieur est ascendant contre le seuil, et dirigé précisément vers le haut au moment où il le quitte, la divergence initiale des deux filets inférieur et supérieur est environ de 90°, c'est-à-dire moitié de ce qu'elle est dans le cas du déversoir avec armature de la figure. On pourra donc prendre $c = \frac{1}{2}C$, à titre d'hypothèse vraisemblable.

Après quoi, les équations (21), comparées aux équations analogues concernant le déversoir vertical, où N′ et K seront les mêmes de part et d'autre, dans le cas de la nappe noyée en dessous, et K pareil de même dans le cas de la nappe libre, donneront

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{n^2}{\nu^2} = \dfrac{1-C}{1-c} & \text{(nappe noyée en dessous),} \\ \dfrac{k}{\varkappa} = \sqrt{\dfrac{1-C}{1-c}} & \text{(nappe libre).} \end{cases}$$

6. Dans le cas d'un déversoir vertical à nappe libre, l'on a, comme

il a été dit, $p_0 = 0$, $N = 0$, $n = 1$, $\nu = 1$; et les équations précédentes (22), (25) et (28) deviennent respectivement

$$(29) \qquad C = 1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa)^3(1-\varkappa)}}, \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{1}{2}C,$$

$$(30) \qquad c' = \frac{1}{2}C' = \frac{2\varkappa - 1}{2\varkappa(2-\varkappa)}, \qquad k = \varkappa\sqrt{\frac{1-C}{1-c}}.$$

Finalement l'équation (15) donne

$$(31) \qquad m = (1-c)^{\frac{3}{2}} f(k), \qquad \text{avec} \qquad f(k) = (k + k^2)\log\frac{1}{k};$$

d'où

$$f'(k) = (1+2k)\left(\log\frac{1}{k} - \frac{1+k}{1+2k}\right).$$

Or ici, de (13), l'on déduit

$$1 - K = (1-c)k^2; \qquad \text{d'où} \qquad k' = \frac{k^2 c' - 1}{2k(1-c)}.$$

Enfin l'annulation de la dérivée de m donne, par l'élimination de k', pour déterminer le maximum de m, l'équation

$$(32) \qquad f'(k) = -[3f(k) - kf'(k)]kc'.$$

La vérification de cette équation en k se fait en se donnant d'abord des valeurs de $\varkappa$ à essayer, et l'on applique ensuite les méthodes d'approximation ordinaires. M. Boussinesq est conduit ainsi à poser $\varkappa = 0,503324$; et, en faisant les calculs au moyen de Tables de logarithmes à cinq décimales, il trouve

$$C = 0,23092, \qquad c = 0,11551, \qquad c' = 0,004412,$$

$$k = 0,46945, \quad \log\text{nép.}\frac{1}{k} = 0,75618, \quad f(k) = 0,52164, \quad f'(k) = -0,00325,$$

$$[3f(k) - kf'(k)]kc' = 0,003245.$$

Et la vérification de l'équation (32) a lieu avec toute l'exactitude que comporte l'emploi des Tables à cinq décimales. Quand au coefficient

de débit, que nous appellerons m' ici, il sera fourni par (31). L'on trouve ainsi

$$m' = (1-c)^{\frac{3}{2}} f(k) = 0,43422,$$

ou, en se bornant à quatre décimales, ce qui est bien suffisant,

$$m' = 0,4342. \tag{33}$$

Les observations vérifient ce coefficient au centième près, c'est-à-dire au degré d'approximation qu'elles comportent en général.

CHAPITRE II.

DÉVERSOIRS A NAPPE NOYÉE EN DESSOUS.

7. M. Boussinesq a inséré, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris* (1er juillet 1907), une nouvelle Note intitulée : *Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir en mince paroi, sans contraction latérale et à nappe noyée en dessous*. Elle commence ainsi :

« Les mêmes principes qui m'ont permis, dans une Note du 24 mars 1907 (*Comptes rendus*, p. 668), de donner une théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir à nappe libre inférieurement, s'appliquent lorsque la nappe est noyée en dessous, pourvu qu'on assimile à du *fluide mort*, ayant sa pression hydrostatiquement croissante de haut en bas et donnée directement au niveau du seuil, la masse liquide qui tourbillonne sous la nappe. La hauteur de charge étant appelée h et le poids de l'unité de volume liquide ρg, nous désignerons par $N'\rho gh$ cette pression au niveau du seuil, supposée ici constante comme h; de sorte que N' sera un nombre donné. »

A la fin de cette Note, M. Boussinesq indique en quelques lignes une méthode plus rapide que celle qu'il a suivie dans ses travaux antérieurs, et c'est dans ces quelques lignes que j'ai puisé l'idée de mon Travail.

8. Le cas de ces nappes déversantes qui ont, au-dessous d'elles, non plus une masse gazeuse ou emprisonnée, ou communiquant librement avec l'atmosphère, mais un volume plus ou moins grand d'une eau tourbillonnante, censée exercer des pressions variables hydrostatiquement aux divers niveaux, se présente assez fréquemment quand aucun évasement n'est ménagé, à l'aval du seuil, dans les joues ou parois latérales du déversoir; car, sans cesse aspiré par le courant qui l'entraîne, le peu d'air qui se trouvait primitivement enfermé sous ces nappes déversantes, ou qu'y amène une circonstance fortuite, est bientôt remplacé par du liquide indéfiniment renouvelable. Remarquons d'abord que, dans ce cas du déversoir à nappe noyée en dessous, comme pour la nappe libre, la variable en fonction de laquelle s'expriment aisément tous les autres paramètres est encore $\varkappa$, ici identique à k. C'est k, dont dépendent le plus naturellement la contraction inférieure c et sa dérivée c', qu'il faudra généralement choisir comme variable indépendante dans le problème considéré. Dans ces conditions et avec l'hypothèse (27), comme on a vu, la première des équations (22) nous donne

$$\frac{1}{1-C} = 1 + k - \nu^2 k^3 \left(1 + \frac{1}{2} k\right). \tag{34}$$

Remplaçons-y ν^2 par sa valeur résultant de la seconde colonne des équations (21), c'est-à-dire par

$$\nu = \sqrt{\frac{1-N'}{1-C}}, \qquad \text{ou} \qquad \nu^2 = \frac{1-N'}{1-C},$$

et résolvons par rapport à C. Il vient

$$C = k \frac{1 - (1 - N') k^2 \left(1 + \frac{1}{2} k\right)}{(1 - k)}.$$

Par suite, la contraction inférieure c de la nappe noyée en dessous sera

$$c = \frac{1}{2}C = k\frac{1 - (1 - N')k^2\left(1 + \frac{1}{2}k\right)}{2(1+k)}. \tag{35}$$

La première des équations (25), dans l'hypothèse de $\varkappa = k$, nous donne immédiatement

$$C' = \frac{\nu^2 k^2(3 + 2k) - 1}{2\nu^2 k(1 + k)}.$$

Et par conséquent, l'on aura, sans aucun calcul,

$$c' = \frac{1}{2}C' = \frac{\nu^2 k^2(3 + 2k) - 1}{4\nu^2 k(1 + k)}. \tag{36}$$

Ensuite, vu la valeur de $C = 2c$, l'équation ci-dessus, qui nous a fourni ν^2, deviendra

$$\nu^2 = \frac{1 - N'}{1 - C} = \frac{1 - N'}{1 - 2c}. \tag{37}$$

A ces équations joignons encore la première des équations (21), c'est-à-dire l'équation

$$n = \sqrt{\frac{1 - N'}{1 - C}} \qquad \text{ou} \qquad n^2 = \frac{1 - N'}{1 - c}. \tag{38}$$

Finalement le coefficient de débit m sera donné par la formule

$$m = (1 - c)^{\frac{3}{2}}(nk - n^3k^3)\frac{\log k}{k - 1}. \tag{39}$$

Le mode définitif d'écoulement cherché, produit par un abaissement suffisant du niveau d'aval, avec N′ censé invariable, s'obtient encore, comme nous avons vu dans le cas d'un déversoir quelconque, en rendant maxima l'expression (39) du coefficient m de débit. Il y a donc lieu d'annuler la dérivée de m par rapport à K, ou, plus simplement, celle de $\log m$; et l'on obtient alors l'équation (17), c'est-à-dire l'équation

$$\frac{n^2k^2}{1 - n^2k^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1 - k}\right) = \frac{n^2k^2}{1 - n^2k^2}c'. \tag{40}$$

Cela posé, pour les pressions relatives sous la nappe N′, les plus usuelles, cette équation (40) peut, comme l'a montré M. Boussinesq, se résoudre par une méthode d'approximations successives, méthode qui, d'ailleurs, tomberait en défaut pour les valeurs de N′ voisines de l'unité. Mais une vérification exacte de cette équation (40) se fait en choisissant k comme variable auxiliaire, et, par conséquent, en se donnant d'abord les valeurs de k à essayer. On trouve alors N′, puis c, ν, n, c' et, enfin, m, en procédant comme il suit.

Reprenons l'équation (40) sous la forme

$$\frac{n^2k^2}{1-n^2k^2} - \frac{n^2k^2}{1-n^2k^2}c' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right).$$

En mettant dans le premier membre $\frac{n^2k^2}{1-n^2k^2}$ en facteur commun, il vient

$$\frac{n^2k^2}{1-n^2k^2}(1-c') = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right);$$

et, en prenant les inverses des deux membres,

$$\frac{1-n^2k^2}{n^2k^2}\,\frac{1}{1-c'} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right)\right]^{-1}.$$

Posons, pour abréger les formules,

$$\varphi(k) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right)\right]^{-1}. \tag{41}$$

Alors, l'équation précédente prendra la forme très simple

$$\frac{1-n^2k^2}{n^2k^2}\,\frac{1}{1-c'} = \varphi(k), \qquad \text{ou} \qquad \frac{1-n^2k^2}{n^2k^2} = (1-c')\,\varphi(k);$$

ou bien encore, par l'effectuation de la division indiquée au premier membre,

$$\frac{1}{n^2k^2} - 1 = (1-c')\,\varphi(k).$$

Enfin, divisant les deux membres par $\varphi(k)$, l'on aura

$$\frac{1}{n^2k^2}\,\frac{1}{\varphi(k)} - \frac{1}{\varphi(k)} = 1 - c'.$$

Finalement, en transposant, et changeant de signe les deux membres, il viendra

$$1+\frac{1}{\varphi(k)}-\frac{1}{k^2\varphi(k)}\frac{1}{n^2}=c'. \tag{42}$$

Portons dans cette dernière équation (42) la valeur de c' fournie par l'équation (36) mise sous une forme nouvelle, qui se prête mieux à nos calculs, c'est-à-dire

$$c'=\frac{\nu^2k^2(3+2k)-1}{4\nu^2k(1+k)}=\frac{k(3+2k)}{4(1+k)}-\frac{1}{4k(1+k)}\frac{1}{\nu^2};$$

et, alors, l'équation précédente (42) sera

$$1+\frac{1}{\varphi(k)}-\frac{1}{k^2\varphi(k)}\frac{1}{n^2}=\frac{k(3+2k)}{4(1+k)}-\frac{1}{4k(1+k)}\frac{1}{\nu^2}. \tag{43}$$

Par la simple inspection de la forme de cette équation, on peut remarquer que, lorsqu'on y considère le paramètre k comme ayant reçu une valeur numérique donnée, d'ailleurs quelconque, et, par suite, la fonction $\varphi(k)$ comme parfaitement déterminée, cette équation (43) est une équation linéaire ou du premier degré par rapport aux inverses des quantités n^2 et ν^2, considérées comme inconnues.

9. Proposons-nous maintenant d'éliminer de cette équation linéaire les paramètres n^2 et ν^2; ce que l'on peut faire à l'aide des équations (37) et (38), c'est-à-dire

$$\nu^2=\frac{1-N'}{1-2c} \qquad \text{et} \qquad n^2=\frac{1-N'}{1-c},$$

ou bien en mettant ces équations sous une forme qui se prête mieux à nos calculs,

$$\frac{1}{\nu^2}=\frac{1-2c}{1-N'} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n^2}=\frac{1-c}{1-N'}. \tag{44}$$

L'équation (43) contenant précisément les inverses des quantités ν^2 et n^2, inverses fournis par les équations (44), l'élimination, dont il s'agit, est immédiate; et il vient

$$1+\frac{1}{\varphi(k)}-\frac{1}{k^2\varphi(k)}\frac{1-c}{1-N'}=\frac{k(3+2k)}{4(1+k)}-\frac{1}{4k(1+k)}\frac{1-2c}{1-N'},$$

ou bien, en arrangeant les termes en vue des éliminations ultérieures,

$$1+\frac{1}{\varphi(k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{k^2\varphi(k)}+\frac{1}{1-N'}\frac{c}{k^2\varphi(k)}$$
$$=\frac{k(3+2k)}{4(1+k)}-\frac{1}{4k(1+k)}\frac{1}{1-N'}+\frac{c}{2k(1+k)}\frac{1}{1-N'}.$$

Cherchons maintenant à éliminer de cette équation la contraction inférieure c; ce qui se fait très facilement à l'aide de l'équation (35), qui est

$$c=\frac{k}{2(1+k)}\left[1-(1-N')k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right)\right].$$

Cette élimination donne, d'abord,

$$1+\frac{1}{\varphi(k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{k^2\varphi(k)}+\frac{1}{1-N'}\frac{1}{k^2\varphi(k)}\frac{k}{2(1+k)}\left[1-(1-N')k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right)\right]$$
$$=\frac{k(3+2k)}{4(1+k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{4k(1+k)}$$
$$+\frac{1}{1-N'}\frac{1}{2k(1+k)}\frac{k}{2(1+k)}\left[1-(1-N')k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right)\right],$$

puis, en effectuant les multiplications indiquées,

$$1+\frac{1}{\varphi(k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{k^2\varphi(k)}+\frac{1}{1-N'}\frac{1}{k^2\varphi(k)}\frac{k}{2(1+k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{k^2\varphi(k)}\frac{k(1-N')k^2}{2(1+k)}\left(1+\frac{1}{2}k\right)$$
$$=\frac{k(3+2k)}{4(1+k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{4k(1+k)}$$
$$+\frac{1}{1-N'}\frac{1}{2k(1+k)}\frac{k}{2(1+k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{2k(1+k)}\frac{k(1-N')k^2}{2(1+k)}\left(1+\frac{1}{2}k\right).$$

Finalement, en simplifiant, d'une part dans le premier membre, l'avant-dernier terme, par la suppression de k, et le dernier par celle de $(1-N')k^2$, d'autre part, dans le second membre, le dernier terme par la suppression de $(1-N')$, il vient

$$(45)\quad 1+\frac{1}{\varphi(k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{k^2\varphi(k)}$$
$$+\frac{1}{1-N'}\frac{1}{k\varphi(k)}\frac{1}{2(1+k)}-\frac{1}{\varphi(k)}\frac{k}{2(1+k)}\left(1+\frac{1}{2}k\right)$$
$$=\frac{k(3+2k)}{4(1+k)}-\frac{1}{1-N'}\frac{1}{4k(1+k)}$$
$$+\frac{1}{1-N'}\frac{1}{2k(1+k)}\frac{k}{2(1+k)}-\frac{1}{2(1+k)}\frac{k^2}{2(1+k)}\left(1+\frac{1}{2}k\right).$$

Nous pouvons faire, sur cette équation (45), une remarque pareille à celle que nous avons déjà faite à propos de l'équation ci-dessus (43), c'est-à-dire que, lorsqu'on y considère le paramètre k comme ayant reçu une valeur numérique donnée, d'ailleurs quelconque, et, par conséquent, la fonction $\psi(k)$ comme pleinement déterminée, cette équation (45) est une équation linéaire par rapport à l'inverse de l'expression $(1 - N')$. Donc nous pouvons prévoir, dès à présent, que l'équation (42) d'où nous sommes partis sera du premier degré, ou résoluble sans radicaux, en $1 - N'$ et ensuite en N'. Et, par conséquent, l'on évitera ainsi les tâtonnements, inévitables par toute autre méthode, si l'on se donne directement le paramètre k : *c'est donc celui-ci qu'il convient de choisir comme variable indépendante* dans tout ce qui va suivre. Cela étant, reprenons l'équation (45), et, après y avoir effectué quelques transpositions et quelques réductions, il viendra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-N'}\left[\frac{1}{4k(1+k)^2} - \frac{2+k}{2(1+k)}\,\frac{1}{k^2\varphi(k)}\right]\\&\quad=\frac{1}{4(1+k)}\left[k\left(3+4k+\frac{3}{2}k^2\right)-4(1+k)^2\right]\\&\qquad+\frac{1}{\varphi(k)}\,\frac{1}{2(1+k)}+\frac{1}{\varphi(k)}\left(-2-k+\frac{1}{2}k^2\right),\end{aligned}$$

puis, sous une forme encore plus réduite,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-N'}\,\frac{1}{k}\left[2\frac{(1+k)(2+k)}{k\varphi(k)}-1\right]\\&\quad=\left(4+5k-\frac{3}{2}k^3\right)\left[1+2\,\frac{1+k}{4+5k-\frac{3}{2}k^3}\,\frac{1}{\varphi(k)}\left(2+k-\frac{1}{2}k^2\right)\right].\end{aligned}$$

Il en résulte, pour le produit des inverses des deux quantités $1 - N$ et k, la valeur

$$\frac{1}{1-N'}\,\frac{1}{k}=\left(4+5k-\frac{3}{2}k^3\right)\left\{\frac{1+2\,\dfrac{(1+k)\left(2+k-\frac{1}{2}k^2\right)}{\left(4+5k-\frac{3}{2}k^3\right)\varphi(k)}}{2\,\dfrac{(1+k)(2+k)}{k\varphi(k)}-1}\right\};$$

et, en renversant les deux membres de cette équation, il vient

$$k(1-N')=\frac{2\dfrac{(1+k)(2+k)}{k\varphi(k)}-1}{1+2\dfrac{(1+k)\left(2+k-\frac{1}{2}k^2\right)}{\left(4+5k-\frac{3}{2}k^3\right)\varphi(k)}}\,\frac{1}{4+5k-\frac{3}{2}k^3},$$

c'est-à-dire

$$k(1-N')=\frac{\dfrac{2(1+k)(2+k)-k\varphi(k)}{k\varphi(k)}}{\dfrac{\left(4+5k-\frac{3}{2}k^3\right)\varphi(k)+2(1+k)\left(2+k-\frac{1}{2}k^2\right)}{\varphi(k)}}.$$

Enfin cette équation, multipliée par k, donne visiblement

$$k^2(1-N')=\frac{2(1+k)(2+k)-k\varphi(k)}{2(1+k)\left(2+k-\frac{1}{2}k^2\right)+\left(4+5k-\frac{3}{2}k^3\right)\varphi(k)},$$

ou bien encore

$$(46)\qquad k^2(1-N')=\frac{1-\dfrac{k\varphi(k)}{2(1+k)(2+k)}}{1-\dfrac{k^2}{2(2+k)}+\left(5+\dfrac{4}{k}-\dfrac{3}{2}k^2\right)\dfrac{k\varphi(k)}{2(1+k)(2+k)}}.$$

Posons, pour abréger les formules,

$$(47)\qquad \alpha=\frac{k\varphi(k)}{2(1+k)(2+k)},\qquad \beta=\frac{k^2}{2(2+k)},\qquad \gamma=5+\frac{4}{k}-\frac{3}{2}k^2,$$

et l'équation (46) prendra alors la forme très simple

$$(48)\qquad k^2(1-N')=\frac{1-\alpha}{1+\alpha\gamma-\beta}.$$

C'est *la formule fondamentale* que nous voulions établir et qui va nous servir désormais dans tous nos calculs.

10. Reprenons l'équation (35), qui nous donne la contraction inférieure c, c'est-à-dire

$$c = k\,\frac{1-(1-N')\,k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right)}{2(1+k)} = \frac{k}{2(1+k)}\left[1-(1-N')\,k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right)\right].$$

Posons, d'une manière analogue aux notations (47) ci-dessus,

$$\varpi = (1-N')\,k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right), \tag{49}$$

et l'on aura, pour c, la formule simple

$$c = \frac{k}{2(1+k)}(1-\varpi). \tag{50}$$

La contraction inférieure étant ainsi donnée par cette formule (50), que nous avons mise sous la forme la plus simple, ou se prêtant le mieux aux calculs en vue, l'on obtiendra ensuite n^2 au moyen de la formule (38), qui est

$$n^2 = \frac{1-N'}{1-c}. \tag{51}$$

Finalement, il nous reste à calculer le coefficient de débit m. Pour cela, reprenons son expression (39), qui, en mettant n^3k^3 en facteur commun, devient

$$m = (1-c)^{\frac{3}{2}}\,n^3k^3\left(\frac{1}{n^2k^2}-1\right)\frac{\log k}{k-1}. \tag{52}$$

Comme, dans cette équation, le rapport $\frac{\log k}{k-1}$ se présente quelquefois (pour les valeurs de k voisines de l'unité) sous une forme voisine de l'indéterminée $\frac{0}{0}$, et, par suite, prête trop à erreur avec l'emploi des Tables de logarithmes à cinq décimales, éliminons ce rapport, en utilisant la valeur de la fonction $\varphi(k)$ que l'on aura eu préalablement à calculer pour obtenir N′.

Pour cela, reprenons la formule (41) qui a défini $\varphi(k)$,

$$\varphi(k) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right)\right]^{-1}. \tag{53}$$

Cette équation (53) donne, en prenant les inverses de ses deux membres, et en multipliant par 2,

$$\frac{2}{\varphi(k)} = \frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k},$$

ou bien

$$\frac{1}{\log k} - \frac{2}{\varphi(k)} - \frac{1}{1-k} = \frac{2(1-k)-\varphi(k)}{(1-k)\varphi(k)} = \frac{\varphi(k)-2(1-k)}{(k-1)\varphi(k)};$$

d'où l'on tire, en passant aux inverses,

$$\log k = \frac{(k-1)\varphi(k)}{\varphi(k)-2(1-k)} = \frac{k-1}{1-2\dfrac{1-k}{\varphi(k)}}. \tag{54}$$

Remplaçons $\log k$ par cette valeur (54), dans l'équation (52) qui nous fournit le coefficient de débit m; et il vient

$$m = (1-c)^{\frac{3}{2}} n^3 k^3 \left(\frac{1}{n^2 k^2} - 1\right) \frac{1}{1-2\dfrac{1-k}{\varphi(k)}}. \tag{55}$$

Finalement, nous poserons, pour simplifier,

$$\theta = \frac{1}{n^2 k^2}, \qquad \lambda = -2\frac{1-k}{\varphi(k)}; \tag{56}$$

et l'équation (55) prendra la forme très simple

$$m = \left(\frac{1-c}{\theta}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\theta - 1}{1+\lambda}. \tag{57}$$

C'est l'expression définitive du coefficient de débit m.

11. Remarquons que, dans toutes nos formules, un rôle important revient au paramètre k, qui est notre variable indépendante, et, par

suite, à la fonction $\varphi(k)$, que l'on doit connaître préalablement, pour pouvoir calculer les autres paramètres. La fonction $\varphi(k)$ est immédiatement évaluable par l'emploi des logarithmes, sauf pour quelques valeurs particulières de k, où des procédés particuliers deviennent indispensables; ce sont les trois valeurs : 1, zéro et l'infini. Proposons-nous, par exemple, d'obtenir $\varphi(1)$, valeur se présentant sous la forme indéterminée $\infty - \infty$.

Posons

$$k = 1 - x; \qquad \text{d'où} \qquad 1 - k = x$$

ou bien

$$\frac{1}{1-k} = \frac{1}{x}.$$

Il viendra

$$\frac{1}{\log k} = \frac{1}{\log(1-x)}.$$

Le logarithme, développé en série, donnera

$$\frac{1}{\log k} = \frac{1}{\log(1-x)} = \frac{1}{-\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots} = -\frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots}$$

$$= -\frac{1}{x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots\right)} = -\frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \dots\right)^{-1}$$

$$= -\frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \dots\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \dots.$$

Par suite, l'expression de $\varphi(k)$ devient

$$\varphi(k) = \varphi(1-x) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right)\right]^{-1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right)^{-1} = 2\left[\frac{1}{\log(1-x)} + \frac{1}{x}\right]^{-1} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \dots\right)^{-1}.$$

A la limite $k = 1$, c'est-à-dire pour $x = 0$, il vient donc

$$\varphi(1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 4.$$

Maintenant, cherchons la valeur de cette fonction $\varphi(k)$ pour la valeur $k = 0$. Nous aurons

$$\varphi(k) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right)\right]^{-1} = 2\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right)^{-1}.$$

Par suite

$$\varphi(0) = 2\left[\frac{1}{\log(0)} + 1\right]^{-1} = 2(0+1)^{-1} = 2(1)^{-1} = 2.$$

Finalement, cherchons la valeur de cette même fonction pour k très grand. On sait que le logarithme d'un nombre indéfiniment croissant tend à devenir un infiniment petit par rapport à une puissance quelconque (à exposant positif) de ce même nombre. Cela posé, pour k très grand, le terme $\frac{1}{1-k}$ devient sensiblement $-\frac{1}{k}$, et, par suite,

$$\varphi(k) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right)\right]^{-1} = 2\left(\frac{1}{\log k} - \frac{1}{k}\right)^{-1}.$$

Or, le logarithme de k, étant un infiniment petit par rapport à la première puissance de k, le premier terme de la parenthèse, $\frac{1}{\log k}$, est un infiniment grand par rapport au second terme, $-\frac{1}{k}$; donc la fonction $\varphi(k)$ deviendra

$$\varphi(k) = 2\left(\frac{1}{\log k}\right)^{-1} = 2\log k \text{ sensiblement} \qquad (\text{pour } k \text{ très grand}).$$

Toutes les autres valeurs de la fonction $\varphi(k)$ se calculent directement et sans difficulté dès qu'on se donne le paramètre k. C'est ainsi qu'on trouve, par exemple,

Pour	$k = 0$	0,10	0,20	0,273	0,275	0,30	0,325	0,35	0,40	0,45	0,50
	$\varphi(k) = 2$	2,9550	3,1814	3,3042	3,3072	3,3445	3,3798	3,4138	3,4765	3,5344	3,5886
	$k = 0,60$	0,70	0,80	0,90	0,956	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
	$\varphi(k) = 3,6872$	3,7760	3,8566	3,9310	3,9703	4	4,0646	4,1259	4,1815	4,2374	4,2888
	$k = 1,6$	1,7	1,8	1,8862	2	...	∞				
	$\varphi(k) = 4,3385$	4,3860	4,4301	4,4698	4,5180	...	∞				

Dans tous ces calculs, nous avons employé les Tables de logarithmes à cinq décimales, sauf pour les valeurs de k voisines de l'unité,

c'est-à-dire pour $\varphi(0, 9)$, $\varphi(0, 956)$ et $\varphi(1, 1)$. Le calcul de ces trois valeurs exige l'emploi des Tables à sept décimales, parce qu'il y figure la différence de deux nombres ayant leur rapport voisin de l'unité, et qu'il est, par conséquent, nécessaire d'évaluer avec un ou deux chiffres de plus que cette différence même, les deux premiers s'y entredétruisant.

12. Ces valeurs une fois calculées, nous les avons portées successivement dans notre *équation fondamentale* (48), qui nous a fait connaître les valeurs correspondantes du produit $k^2(1 - N')$ et, par suite, celles de N'. Puis, les valeurs du produit $k^2(1 - N')$ étant connues, l'équation (50) nous a donné immédiatement celles de la contraction inférieure c; après quoi, nous avons obtenu n, ou plutôt n^2, par la relation (51), et enfin le coefficient de débit m par la formule (57). Finalement, nous avons évalué le rapport de ce coefficient de débit m au coefficient de débit, $m' = 0{,}4342$, du déversoir vertical à nappe libre fourni par la formule (33).

Il serait trop long à reproduire ici tous ces calculs, dont voici les résultats :

(T)

$k =$	0,273	0,275	0,30	0,325	0,35	0,40	0,45
$N' =$	−1,8109	−1,7669	−1,2924	−0,9283	−0,6431	−0,2327	0,0419
$c =$	0,0817	0,0822	0,0880	0,0936	0,1990	0,1090	0,1174
$m =$	0,5793	0,5771	0,5513	0,5280	0,5070	0,4705	0,4403
$\frac{m}{m'} =$	1,3342	1,3291	1,2696	1,2160	1,1677	1,0836	1,0140

$k =$	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1	1,1
$N' =$	0,2336	0,4756	0,6158	0,7032	0,7607	0,8000	0,8278
$c =$	0,1267	0,1412	0,1536	0,1631	0,1703	0,1750	0,1773
$m =$	0,4136	0,3728	0,3396	0,3146	0,2950	0,2795	0,2672
$\frac{m}{m'} =$	0,9526	0,8586	0,7821	0,7245	0,6794	0,6437	0,6154

$k =$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,8862
$N' =$	0,8471	0,8608	0,8701	0,8754	0,8772	0,8751	0,8677	0,8553
$c =$	0,1767	0,1729	0,1654	0,1528	0,1336	0,1045	0,0597	0,0000
$m =$	0,2570	0,2510	0,2461	0,2434	0,2424	0,2434	0,2461	0,2493
$\frac{m}{m'} =$	0,5919	0,5781	0,5668	0,5606	0,5586	0,5606	0,5668	0,5742

Les valeurs comprises dans ce Tableau (T) atteignent le degré de précision que comporte, dans le problème, l'emploi, sur formules exactes, des Tables de logarithmes à cinq décimales.

13. Proposons-nous maintenant d'interpréter géométriquement ces résultats. En prenant, d'une part, pour abscisses, les valeurs de N′, d'autre part, comme ordonnées verticales, les valeurs correspondantes soit de c, soit de m, puis joignant leurs extrémités respectives par un trait continu, nous obtiendrons deux courbes qui fourniront, l'une les valeurs de c, l'autre celles de m.

Nous avons marqué en outre, à côté de ces deux courbes, les points représentant, pour des valeurs de N′ voisines des nôtres, les valeurs de c et celles de m, obtenues par la Méthode approchée de M. Boussinesq. Nous avons entouré ces points d'un petit cercle, pour les distinguer des précédents, fournis par la méthode exacte. De cette manière, on se rend immédiatement compte de la concordance des deux méthodes (voir *Pl. I*).

Voici d'ailleurs le Tableau (T_0) de ces valeurs approchées, que nous affecterons toutes de l'indice zéro :

(T_0)

$k_0 =$	0,275	0,30	0,325	0,35	0,40	0,450
$N'_0 =$	−1,818	−1,335	−0,961	−0,668	−0,245	0,039
$c_0 =$	0,082	0,087	0,093	0,098	0,108	0,118
$m_0 =$	0,579	0,554	0,530	0,509	0,472	0,440
$\frac{m_0}{m'} =$	1,334	1,276	1,221	1,173	1,088	1,014
$k_0 =$	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	
$N'_0 =$	0,239	0,492	0,639	0,733	0,795	
$c_0 =$	0,127	0,142	0,156	0,169	0,181	
$m_0 =$	0,413	0,369	0,333	0,305	0,280	
$\frac{m_0}{m'} =$	0,951	0,849	0,768	0,701	0,646	

14. Passons maintenant aux confrontations expérimentales concernant tous ces résultats théoriques, exacts ou approchés. M. Bazin, dans le quatrième de ses Mémoires intitulés *Expériences nouvelles sur*

l'écoulement en déversoir, publié dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (en 1894), a représenté ses résultats, trouvés expérimentalement, par les trois formules empiriques suivantes :

$$(58) \qquad \frac{m_e}{m'} = 1,01 - 0,245\,N'\left(1 + \frac{N'}{5}\right)$$

(pour N′ compris entre les limites — 0,9 et 0,3),

$$(59) \qquad \frac{m_e}{m'} = 1 - 0,235\,N'(1 + N')$$

(pour N′ compris entre les limites 0,3 et 0,6),

$$(60) \qquad \frac{m_e}{m'} = 1,05\sqrt[3]{1 - N'} \qquad \text{(pour N′ supérieur à 0,6)},$$

où nous avons affecté le coefficient de débit m de l'indice e, pour faire voir qu'il s'agit de la valeur, obtenue expérimentalement, de ce coefficient, m' étant toujours égal à 0,4342, et N′ ayant des valeurs comme celles des Tableaux (T_0) et (T).

La première de ces formules, c'est-à-dire (58), convient aux nappes noyées en dessous et dégagées du remous d'aval, qui donnent les résultats les plus nets. La deuxième et la troisième, c'est-à-dire (59) et (60), s'appliquent aux nappes noyées en dessous, pour des valeurs de N′ qui ne leur permettent pas de se dégager du remous d'aval.

Calculons le rapport $\frac{m_e}{m'}$ par ces trois formules empiriques de M. Bazin, en donnant d'abord à N′ les valeurs correspondantes du Tableau (T_0), sauf les valeurs — 1,818 et — 1,335, qui sortent du champ des pressions relatives produites sous les nappes noyées en dessous proprement dites, pour lesquelles M. Bazin a construit spécialement la formule (58); car il donne comme limite inférieure — 0,9. On aura donc le Tableau T_{0e} :

(T_{0e})

$N'_0 =$	— 0,961	— 0,668	— 0,245	0,039	0,239	0,492	0,639	0,733	0,759
$\frac{m_e}{m'} =$	1,200	1,152	1,067	1,000	0,930	0,827	0,748	0,676	0,619

Calculons maintenant le même rapport, par les mêmes formules

empiriques, avec les valeurs correspondantes du Tableau (T), on aura (T_e) :

$$(T_e)\begin{cases} N' = -0{,}9283 & -0{,}6431 & -0{,}2327 & 0{,}0419 & 0{,}2336 & 0{,}4756 & 0{,}6158 & 0{,}7032 & 0{,}7607 \\ \dfrac{m_e}{m'} = 1{,}1952 & 1{,}1473 & 1{,}0405 & 0{,}9960 & 0{,}9323 & 0{,}8351 & 0{,}7633 & 0{,}7004 & 0{,}6519 \end{cases}$$

Les valeurs théoriques sont, comme on le voit, plus fortes que les valeurs trouvées expérimentalement. On se l'explique en observant que les pertes de force vive translatoires, négligées par la théorie et employées à faire tourbillonner sous la section contractée une masse fluide étrangère à la nappe déversante, doivent être plus fortes quand cette masse est de l'eau que lorsque c'est de l'air et, par suite, en réduisant à la fois la vitesse moyenne et le débit, atténuer un peu plus les numérateurs m que les dénominateurs m'.

15. Remarquons que, pour $k = 1$, notre *formule fondamentale* (48) nous a donné $N' = 0{,}8$ et $m = 0{,}2795$; or, une légère extrapolation du Tableau (T_0) donne, pour $N' = 0{,}8$, $m = 0{,}278$ ou $\frac{1}{186}$ seulement en moins. La méthode approchée suffit donc parfaitement jusqu'à la limite $k = 1$ ou $N' = 0{,}8$, au delà de laquelle les filets fluides de la nappe déversante deviendraient concaves vers le haut, si la loi du phénomène ne changeait pas.

Mais l'expérience montre qu'à ce moment, où le rayon R_0 de courbure est infini, de sorte que les filets fluides sont rectilignes et presque horizontaux à la traversée de la section contractée, la nappe déversante cesse de plonger sous le remous d'aval et s'étale à la surface de ce remous, où elle offre quelques ondulations, en raison desquelles M. Bazin l'a appelée *nappe ondulée*. Le rayon R_0 de courbure reste donc, désormais, assez grand pour qu'on puisse poser sans cesse $k = 1$. Or, alors la troisième des formules (13), c'est-à-dire $1 - K = (1 - N')k^2$, donne $K = N'$, et la variable K n'ayant plus d'admissible que la valeur unique donnée N', sa fonction m n'a aussi qu'une valeur possible et n'a plus de raison à être rendue maxima.

Il n'y aura donc pas lieu d'appliquer nos valeurs de c et de m pour

$k > 1$, valeurs dont l'impossibilité pratique résulterait d'ailleurs du décroissement qu'y éprouve bientôt la contraction inférieure c, alors que, visiblement, la diminution de la pression sous la nappe déversante doit plutôt la faire grandir. Cette même impossibilité pratique est indiquée encore par la manière anormale dont y varie N′, qui décroît, au lieu d'augmenter, au delà de $k = 1{,}6$.

16. Il n'y aura donc pas lieu non plus d'appliquer, au delà de la limite $N' = 0{,}8$, le principe du débit maximum avec N′ constant, parce que la pression sous la nappe déversante, devenue désormais, à très peu près, variable hydrostatiquement dans le plan de la section contractée, en raison même de la faible courbure et du parallélisme des filets fluides sur la dite section, fera k égal à l'unité et donnera $K = N'$.

Dans ces conditions, l'équation (50), qui donne la contraction inférieure c, devient simplement

$$c = \frac{3N' - 1}{8}. \tag{61}$$

De la même manière, l'équation (51), qui régit n^2, prend la forme

$$n^2 = \frac{8}{3}\frac{1 - N'}{3 - N'}. \tag{62}$$

Quant au coefficient de débit m, que nous fournissait l'équation (57), il est désormais

$$m = \frac{1 + 5N'}{8}\sqrt{1 - N'}, \tag{63}$$

formule qu'on déduit sans peine de l'équation (57). La pression relative N′ sous la masse déversante étant maintenant la seule variable indépendante qui subsiste, nous n'avons qu'à lui attribuer dans nos formules les diverses valeurs comprises entre $N' = 0{,}8$ et $N' = 1$, pour obtenir les expressions correspondantes de la contraction inférieure c et du coefficient de débit m ou du rapport $\frac{m}{m'}$. Ces calculs nous ont

donné le Tableau suivant, en y appelant m_1 les coefficients de débit. Pour

(T_1)

$N' =$	0,800	0,850	0,900	0,926	0,950	0,975	1,000
$c =$	0,1750	0,1937	0,2125	0,2315	0,2375	0,2437	0,2500
$m_1 =$	0,2795	0,2542	0,2174	0,1914	0,1607	0,1162	0,0000
$\frac{m_1}{m'} =$	0,6437	0,5854	0,5007	0,4409	0,3701	0,2674	0,0000

Nous avons appliqué ensuite aux nappes ondulées la dernière formule empirique de M. Bazin, celle qui concerne les valeurs de N′ supérieures à 0,6, savoir

$$\frac{m_e}{m'} = 1,05\sqrt[3]{1 - N'};$$

et nous avons trouvé comme résultats le Tableau suivant :

(T_{2e})

$N' =$	0,800	0,850	0,900	0,926	0,950	0,975	1,000
$\frac{m_e}{m'} =$	0,6140	0,5579	0,4873	0,4408	0,3868	0,3070	0,0000

En comparant ces deux derniers Tableaux (T_1) et (T_{2e}), on observe que le rapport du coefficient de débit m de notre déversoir vertical à nappe ondulée, au coefficient de débit m' du déversoir vertical à nappe libre, du Tableau (T_1) résultant de la formule (63), est un peu supérieur à celui du Tableau (T_{2e}) fourni par la formule empirique de M. Bazin, jusqu'à la valeur $N' = 0,926$ et même pour cette valeur elle-même, à partir de laquelle il devient inférieur. On peut dire, en se bornant à trois décimales, que ces deux rapports, l'un théorique, l'autre expérimental, ont la valeur commune 0,441 pour $N' = 0,926$ et que leur différence change de sens au delà; après quoi ils s'annulent tous les deux à la limite $N' = 1$.

Vu l'extrême simplicité de ces dernières formules (61) et (63), obtenues en supposant $k = 1$ et, par suite, R_0 infini, on serait tenté de les appliquer pour des valeurs de N′ inférieures à 0,8, valeurs pour lesquelles il y avait un maximum de m à adopter dans l'hypothèse de k variable. En faisant donc ces calculs de c et de $\frac{m}{m'}$, on reconnait qu'ils sont admissibles, avec une certaine approximation, jusqu'à la

valeur 0,7 de N′, mais qu'ils décroissent trop et commencent à devenir inacceptables, au-dessous de $N' = 0{,}68$ environ.

Il y a donc lieu de continuer nos courbes à abscisse N′ et à ordonnées respectives c et $\frac{m}{m'}$, arrêtées à la limite $N' = 0{,}8$, par celles qui représenteront, entre $N' = 0{,}8$ et $N' = 1$, les deux valeurs (61) et (63) de c et de m. A cela près que nous avons pris pour ordonnée, dans la seconde de ces courbes, le rapport $\frac{m}{m'}$, proportionnel à m, les prolongements dont il s'agit ici sont les lignes pointillées qu'on voit dans la planche II. Nous y avons joint les courbes représentant les valeurs de $\frac{m_e}{m'}$ données par les formules empiriques de M. Bazin, la dernière ayant son prolongement aussi pointillé à partir de la limite $k = 1$ ou $N' = 0{,}8$, et ceci pour mieux se rendre compte de l'allure du phénomène.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

Vu et permis d'imprimer :

Paris, 19 décembre 1907,

L. LIARD.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Vu et approuvé :

Paris, 19 décembre 1907,

Paul APPEL.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Mécanique céleste : Principes de la méthode de la variation des constantes et son application au calcul des perturbations des planètes.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 décembre 1907,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Paul APPELL.

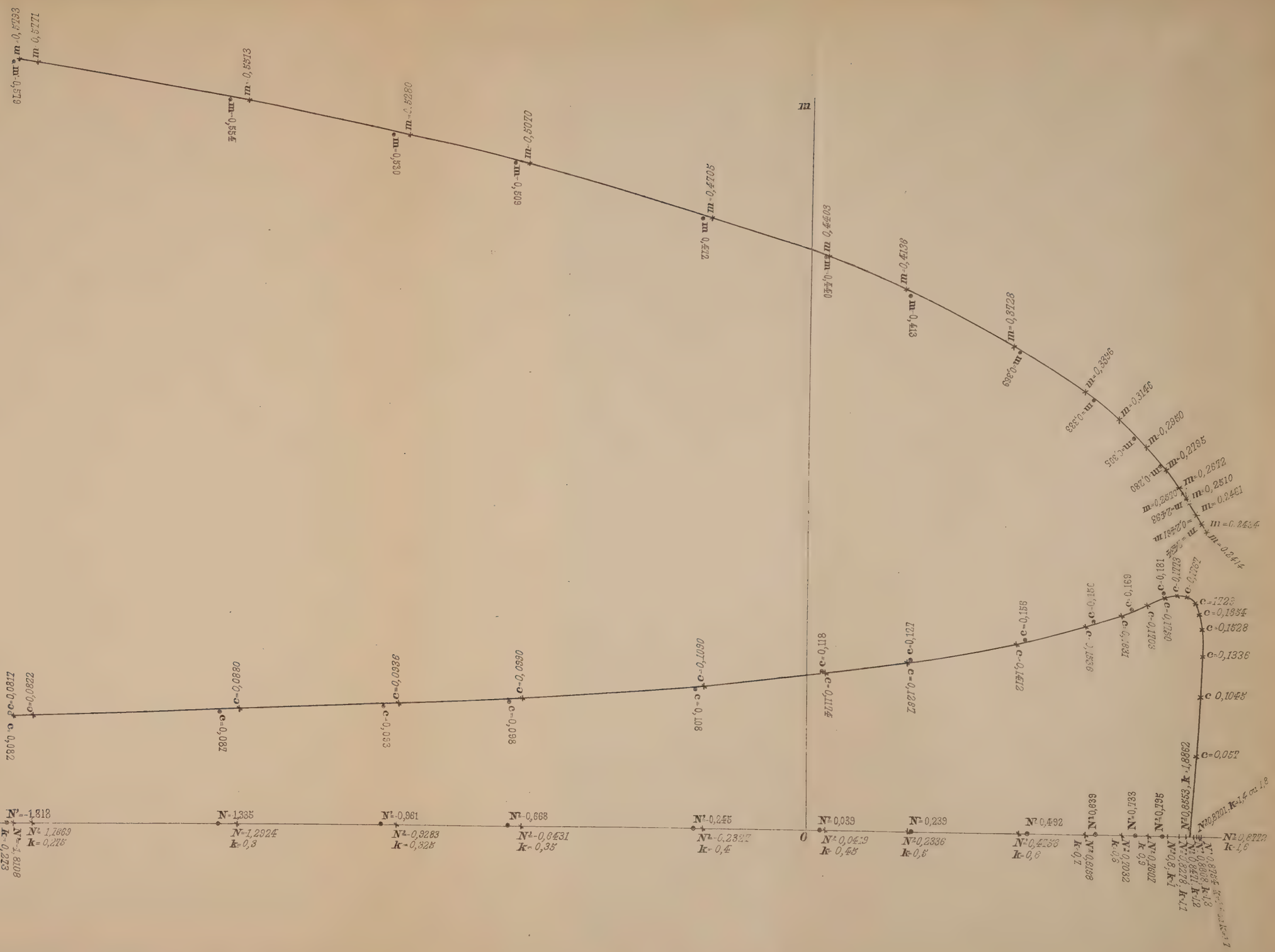
Vu et permis d'imprimer :

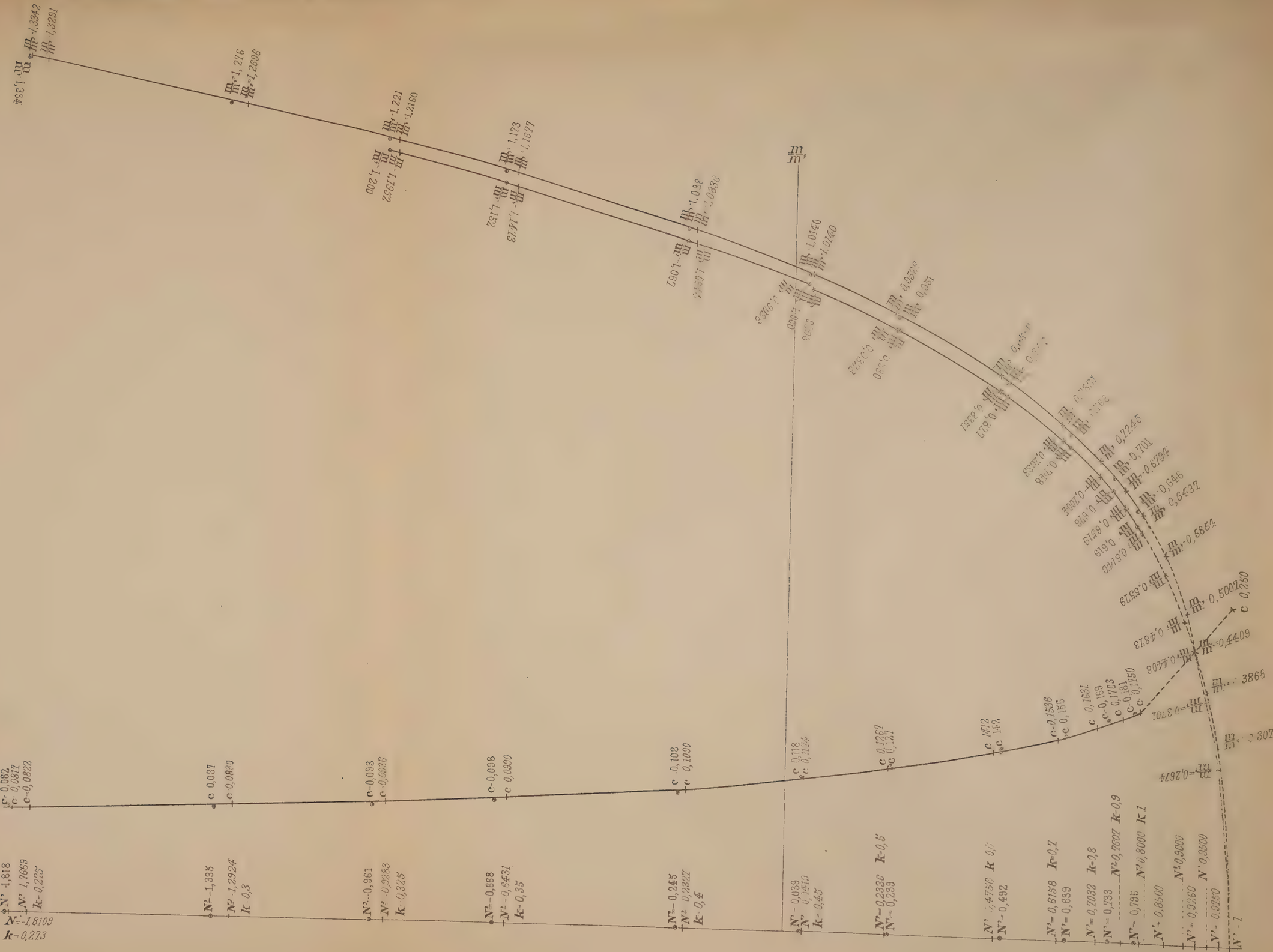
Paris, le 19 décembre 1907,

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

L. LIARD.

40988 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.


m
m=0,5729
m=0,5771
m=0,5613
m=0,5456
m=0,5280
m=0,5080
m=0,4705
m=0,4524
m=0,4403
m=0,4450
m=0,4136
m=0,3728
m=0,3296
m=0,3146
m=0,2950
m=0,2795
m=0,2672
m=0,2510
m=0,2461
m=0,2434
m=0,2414
c=0,0822
c=0,0880
c=0,0838
c=0,0830
c=0,1090
c=0,118
c=0,1274
c=0,1827
c=0,1528
c=0,1336
c=0,1045
c=0,057
N'=-1,818
N'=-1,8708
k=0,273
N'=1,2669
k=0,275
N=1,2924
k=0,3
N=0,961
N=0,9283
k=0,325
N=0,668
N=0,6431
k=0,35
N=0,245
N=0,2327
k=0,4
0
N=0,039
N=0,0429
k=0,45
N=0,239
N=0,2336
k=0,5
N=0,492
N=0,4736
k=0,6
N=0,8198
k=0,7
N=0,7938
k=0,8
N=0,7082
k=0,9
N=0,7807
N=0,8701, k=1,4 ou 1,8
N=0,8722
k=1,6


m
m'
N' 1,818
N² 1,7869
k= 0,273
N=1,8109
k=0,273
N²=1,335
N²=1,2924
K=0,3
N²=0,961
N²=0,9283
K=0,325
N²=0,868
N²=0,8431
K=0,35
N²=0,245
N²=0,2327
K=0,4
N'=0,039
N'=0,1410
K=0,45
N'=0,492
N'=0,639
N'=0,733
N²=0,7807 K=0,9
N'=0,786
N²=0,8000 K=1
N'=0,8600
N'=0,9000
N'=0,9300
N'=0,9500
N'=1
c 0,082
c 0,0817
c=0,0822
c 0,087
c 0,0849
c=0,093
c=0,0936
c=0,098
c 0,0990
c 0,103
c 0,1090
c 0,118
c 0,1174
c 0,1287
c 0,1267
c 1412
c 142
c=0,1538
c 0,155
c 0,1631
c=0,169
c 0,1703
c 0,181
c 0,1950
m=0,2614
m=0,3701
m=0,3866
m=0,3070
m=0,4408
m=0,4409
m=0,4873
m=0,5007
m=0,5852
m=0,5579
m=0,6794
m=0,646
m=0,6437
m=0,6519
m=0,6378
m=0,6219
m=0,6140
m=0,7245
m=0,701
m=0,7288
m=0,7238
m=0,8217
m=0,8217
m=0,8217

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
40988 Quai des Grands-Augustins, 55.